אלגברה 1/מ

תרגול

מתרגלת: ויויאן לאון

חורף תשפ"ו

TECHNION
Israel Institute of Technology

תזכורת:

1. יהיו U,V מרחבים וקטוריים מעל שדה F. העתקה $T:V \to U$ נקראת העתקה לינארית אם מתקיים:
   1. לכל $v_1,v_2 \in V$: $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$
   2. לכל $\alpha \in F, v \in V$: $T(\alpha v)=\alpha T(v)$
2. אם T לינארית אז $T(0)=0$.
3. תהי $T:V \to U$ ט"ל. הגרעין של T:
$$kerT=\{v \in V \mid T(v)=0\}$$
4. תהי $T:V \to U$ ט"ל. התמונה של T:
$$ImT=\{u \in U \mid \exists v \in V : T(v)=u\}=\{T(v) \mid v \in V\}$$
5. משפט: $kerT$ הוא תמ"ו של V.
6. משפט: ImT הוא תמ"ו של U.
7. T נקראת חח"ע אם עבור $v_1 \neq v_2 \Leftarrow T(v_1) \neq T(v_2)$

TECHNION Israel Institute of Technology

תזכורת:

8. T נקראת על אם לכל $u \in U$ קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = u$. כלומר אם $ImT = U$.
9. T נקראת הפיכה אם קיימת העתקה $S: U \to V$ כך ש:

$$T \circ S = id_U$$
$$S \circ T = id_V$$

10. T הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל.
11. T חח"ע אמ"מ $\ker(T) = \{0\}$.
12. משפט המימדים השני: $dimV = \dim\ker(T) + \dim Im(T)$
13. יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V. אז $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ פורשת את $Im(T)$.
14. יהיו V, U מ"ו מעל F, יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V ו- $\{u_1, \dots, u_n\}$ אוסף של וקטורים ב- U. אז קיימת העתקה לינארית יחידה $T: V \to U$ כך ש:

$$T(v_1) = u_1$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = u_n$$

TECHNION Israel Institute of Technology

פרק 12
מטריצות מייצגות

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ העתקה המוגדרת ע"י $T(v) = Av$, כאשר: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

למשל,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

א. הראו ש-T לינארית.

יהיו $u,v \in \mathbb{R}^4$ ו- $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, אז:

$$T(\alpha u + \beta v) = A(\alpha u + \beta v) = A\alpha u + A\beta v = \alpha Au + \beta Av = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

לכן T לינארית.

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

ב. מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ראינו, שאם ניקח בסיס של $\mathbb{R}^4$ ונפעיל עליו T, נקבל קבוצה פורשת לתמונה.

נפעיל T על איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T(e_1) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ C_1 \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(e_3) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ C_3 \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ C_2 \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T(e_4) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ C_4 \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

ב. מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

קיבלנו כי $Im(T) = Col(A)$.

לכן, לקבלת בסיס יש לדרג את עמודות A, כלומר יש לדרג את A^t:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow B_{ImT} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נשים לב שמאחר ו-$Im(T) = Col(A)$, מקבלים:

$$\dim\big(Im(T)\big) = \dim\big(Col(A)\big) = \dim\big(Row(A^t)\big) = r(A)$$

קיבלנו $\dim\big(Im(T)\big) = r(A)$.

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

ג. מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

מחפשים $v \in \mathbb{R}^4$ המקיים: $0 = T(v) = Av$.

כלומר יש לפתור את הממ"ל ההומוגנית $Av = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{KerT} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

קיבלנו כי הגרעין הוא מרחב הפתרונות של הממ"ל ההומוגנית $A\bar{x} = 0$.

ולכן, מימד הגרעין הוא מימד מרחב הפתרונות של $A\bar{x} = 0$, כלומר: $4 - r(A) = 4 - 3 = 1$

קיבלנו $Ker(T)$ הוא פתרון ממ"ל הומוגני.

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

ד. הכלילו עבור $T: F^n \to F^m$ המוגדרת ע"י $T(v) = Av$ כאשר $A \in F^{mxn}$.

ראינו כי ההוכחה ש- T לינארית לא תלויה באיברי המטריצה A.

ראינו שבמקרה זה,ע"י הפעלת T על הבסיס הסטנדרטי של F^n נקבל:

$$Im(T) = Col(A)$$

מכאן נובע כי:

$$\dim\big(Im(T)\big) = r(A)$$

הגרעין הוא מרחב הפתרונות של: $A\bar{x} = 0$, ממשפט המימדים השני נובע:

$$\dim\big(Ker(T)\big) = dimV - \dim\big(Im(T)\big) = n - r(A)$$

הפכנו את הלא מוכר למוכר, ולכן, אנחנו רוצים כל העתקה לינארית להציג בצורה כזו- כמשהו מוכר.

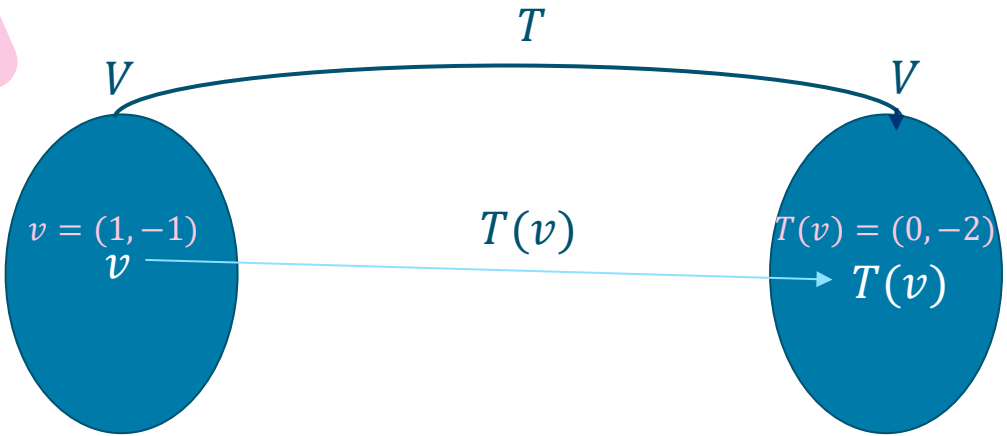
איך?

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

תהי $T: V \to V$ ט"ל.

דוגמא:
$T(x,y) = (x+y, 2y)$

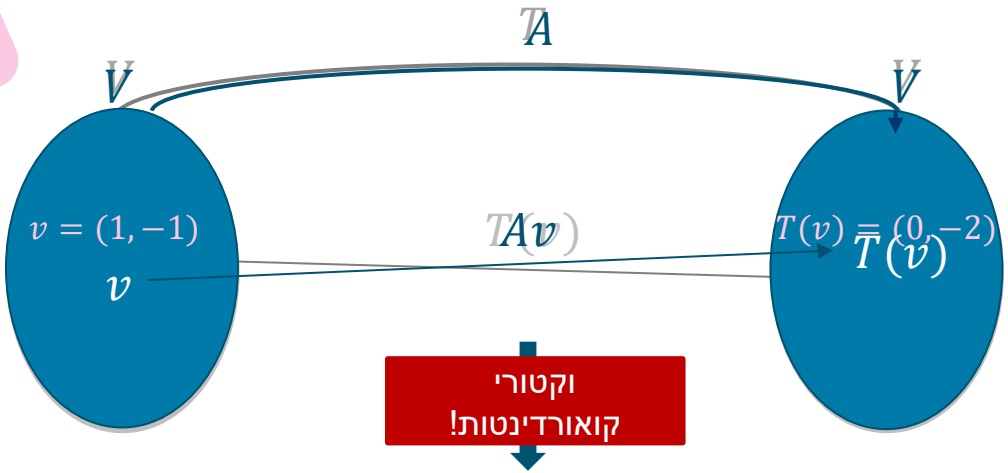


TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

תהי $T: V \to V$ ט"ל.

דוגמא:
$T(x,y) = (x+y, 2y)$



ואם
$V = R_n[x]$?
איך מכפילים
במטריצה?

נמצא להם
וקטורים
שקולים ב-
R^n

$$A[v]_B$$

$v = (1,-1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$T(v) = (0,-2)$

TECHNION
Israel Institute of Technology

הקדמה:

נשים לב שאם נבנה מטריצה A כך שבעמודות שלה יהיו וקטורי קואורדינטות של התמונות של איברי בסיס B כאשר $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

נקבל עבור $v \in V$ כלשהו, כאשר $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$:

$$A[v]_B = A[(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n)]_B = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 [T(v_1)]_B + \cdots + \alpha_n [T(v_n)]_B$$

כפל מטריצה בוקטור

$$= [\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)]_B = [T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)]_B = [T(v)]_B$$

תכונות של ו"ק

לינאריות של T

A נקראת המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B, והיא מסומנת $[T]_B$.

TECHNION Israel Institute of Technology

הגדרה:

תהי $T: V \to V$ ט"ל. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V. לכל $i = 1, \dots, n$ נוכל לרשום את $T(v_i)$ כק"ל של איברי הבסיס. כלומר, קיימים סקלרים $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ כך ש:

$$T(v_1) = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n$$
$$T(v_2) = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

המטריצה המייצגת של T לפי בסיס B היא:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

כלומר, העמודה ה- i במטריצה מייצגת של T לפי בסיס B היא וקטור הקואורדינטות $[T(v_i)]_B$

תזכורת:

V מ"ו מעל שדה F, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס של V, אז לכל $v \in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ יחידים כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. וקטור הקואורדינטות של v לפי בסיס B הוא:

$$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

משפט:

תהי $T: V \to V$, B בסיס של V, אז $[T]_B[v]_B = [T(v)]_B$

תכונות של מטריצה מייצגת:

יהיו $T,S : V \to V$, אז:

1. $[T \pm S]_B = [T]_B \pm [S]_B$
2. $[Id_V]_B = I$
3. $[T \circ S]_B = [T]_B[S]_B$

מסקנה: T הפיכה אמ"מ $[T]_B$ הפיכה, ואז $[T]_B^{-1}$ מייצגת את T^{-1} לפי בסיס B: $[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$

4. מרחב העמודות של $[T]_B$ הוא אוסף וקטורי קואורדינטות של איברי $Im(T)$ לכן העמודות פורשות את $Im(T)$ לפי בסיס B.

מסקנה: $dimIm(T) = r([T]_B)$

מסקנה: $dimKerT = dimV - r([T]_B)$

5. מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $[T]_B x = 0$ הוא אוסף וקטורי הקואורדינטות של האיברים ב- $kerT$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תכונות של מטריצה מייצגת:

יהיו $T,S : V \to V$, אז:

6. $[T^k]_B = ([T]_B)^k$

7. $[\alpha T]_B = \alpha [T]_B$

TECHNION
Israel Institute of Technology

מטריצת מעבר

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל F, ויהיו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ שני בסיסים שונים של V. ניתן לכתוב:

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n$$
$$u_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$$

מטריצת המעבר מ- B ל- C היא המטריצה:

$$P_{B\to C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

Vivian Lawin

כלומר, העמודה ה- i במטריצת המעבר היא וקטור הקואורדינטות של u_i לפי בסיס B, כלומר $[u_i]_B$.

כלומר, עבור $v_i \in B$, $u_i \in C$, לחישוב מטריצת המעבר $B \to C$ מחשבים $[u_i]_B$

משפט:

יהי $v \in V$. אז $P_{B\to C}[v]_C = [v]_B$

תכונה:

$P_{B\to C}$ הפיכה, ו- $(P_{B\to C})^{-1} = P_{C\to B}$

באופן כללי, B,C,G בסיסים שונים של V, אז: $P_{B\to C} \cdot P_{C\to G} = P_{B\to G}$

TECHNION
Israel Institute of Technology

משפט:

תהי $T: V \to V$, ויהיו B,C בסיסים של V, אז:

$$[T]_B = P_{B\to C}[T]_C P_{C\to B} = (P_{C\to B})^{-1}[T]_C P_{C\to B}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 1:

נתונה $T: R_3[x] \to R_3[x]$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = (a+2b-c)+(b+2d)x+(3a-c+b)x^2+(a+b+c+d)x^3$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי $E = \{1,x,x^2,x^3\}$

ב. מצאו את המטריצה המייצגת לפי הבסיס: $B = \{1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3\}$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 2:

נתון $T: R^3 \to R^3$ כך ש- $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, עבור הבסיס $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

א. חשבו $T(1,7,-9)$

ב. חשבו $T(1,1,0)$

ג. מצאו T

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 3:

נתון מ"ו $V = R^3$ עם בסיס $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ והעתקה $T: V \to V$ כך ש-

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו את $kerT$ ואת ImT.

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 4:

נתון $V = R^3$ עם בסיס $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$, ונתון:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_E$, כאשר E הוא הבסיס הסטנדרטי.

TECHNION
Israel Institute of Technology